Αθηναϊκό Ακαδημαϊκό Περιοδικό - Τόμος 2, Τεύχος 1, Μάρτιος 2022 - Σελίδες 25-34

Επιστημονικό Άρθρο

Η Λύση του Αριαμπάτα για τα Έσοδα από Δεδουλευμένους Τόκους στο Κεφάλαιο με την Πάροδο του Χρόνου - Πώς Προέκυψε;

Αμπαλαβανάρ Ναυθακουμάρ
Καθηγητής
Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης στο Oswego, ΗΠΑ

Αλόκ Κουμάρ
Καθηγητής
Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης στο Oswego, ΗΠΑ

Ο Αριαμπάτα στο βιβλίο του Aryabhatiya (Ganita-pada, 25) παρέχει τη σωστή λύση σε μια κατάσταση όπου ένα αρχικό χρηματικό κεφάλαιο (P) δανείζεται με καθορισμένο επιτόκιο ανά μήνα. Στο τέλος του πρώτου μήνα, ο κερδισμένος τόκος χρημάτων (I) δίνεται ξανά ως δάνειο με το ίδιο επιτόκιο για (T) μήνες. Μετά το τέλος των μηνών T, ο κερδισμένος τόκος των χρημάτων μετατρέπεται σε ένα ποσό (A). Για δεδομένες τιμές των P, T και A, ο Αριαμπάτα παρείχε έναν τύπο για την εύρεση του I χωρίς να φαίνονται οι λεπτομέρειες για το πως προέκυψε ο τύπος. Το παρόν άρθρο παρέχει μια πιθανή απλή διαδικασία για την εξαγωγή αυτού του τύπου.

Λέξεις κλειδιά: *Αριαμπάτα, Aryabhatiya, σειρά Τέιλορ, διωνυμικό θεώρημα, ανισότητα Μπερνούλι*

Εισαγωγή

Ο Αριαμπάτα (476-550 CE) είναι ένας Ινδός «πολυμαθηματικός» που συνέταξε το *Aryabhatiya*, ένα βιβλίο που ασχολείται με τα μαθηματικά (*ganita-pada*), τη σφαιρική αστρονομία (*gola-pada*) και τον υπολογισμό του χρόνου (*kala-kriya-pada*) σε 118 μετρικούς στίχους υποδιαιρούμενους σε τέσσερα κεφάλαια. Συνέθεσε τους στίχους στη νεαρή ηλικία των 23 ετών για να διατηρήσει την «παλιά γνώση» της Ινδίας, όπως αναφέρεται στο βιβλίο του. Το βιβλίο του είχε σημαντική απήχηση στην Ινδία και στο εξωτερικό καθώς οι μεταγενέστεροι συγγραφείς: Brahmagupta (598-668 CE), Varahamihira (505-587 CE) και Bhaskara I (600-680 CE) έγραψαν εκτενή σχόλια για το έργο του. Πρόσφατα, οι Kumar (2019) και Montgomery & Kumar (2015, 2000), έγραψαν επίσης σχετικά με το έργο που άφησαν αρχαίοι Ινδοί μαθηματικοί όπως ο Αριαμπάτα.

Ο Al-Biruni (973-1050 CE), ένας ισλαμιστής φιλόσοφος-επιστήμονας που έζησε στην Ινδία για πάνω από μια δεκαετία, σχολίασε το έργο του Αριαμπάτα επικρίνοντάς τον για την θέση του υπέρ της κίνησης της Γης τον ενδέκατο αιώνα, περίπου πέντε αιώνες μετά τον Αριαμπάτα. Ο Al-Biruni θεωρούσε τη Γη ακίνητη (Sachau 1964, τομ. 1, σ. 277). Ωστόσο, το βιβλίο του Αριαμπάτα ήταν δημοφιλές στους Άραβες με τον τίτλο *Al-Arjabhar* (Morelon, 1996).

Το 1975, η Ινδία ονόμασε τον πρώτο της δορυφόρο από τον Αριαμπάτα. Το 1979, η Διεθνής Αστρονομική Ένωση ονόμασε έναν σεληνιακό κρατήρα από τον Αριαμπάτα. Τέτοια μεγάλη είναι η φήμη του Αριαμπάτα μεταξύ των σύγχρονων επιστημόνων. Το βιβλίο *Aryabhatiya* γράφτηκε αρχικά στα σανσκριτικά και οι δύο δημοφιλείς αγγλικές μεταφράσεις έγιναν από τους Clark (1930) και Shukla & Sarma (1976). Ενώ η μετάφραση του Clark είναι δημοφιλής στη Δύση, η μετάφραση των Shukla & Sarma χρησιμοποιείται κυρίως στην Ινδία. Γι' αυτό το άρθρο, οι παρόντες συγγραφείς έχουν συμβουλευτεί και τις δύο μεταφράσεις. Ωστόσο, παραθέτεται μόνο η μετάφραση των Shukla & Sarma. Ένας διάσημος μαθηματικός της Ινδίας, ο καθηγητής J. N. Kapur, σε συνεργασία με τον D. S. Hooda, ανέλυσαν τη ζωή και τη συμβολή του Αριαμπάτα και δημοσίευσαν ένα βιβλίο το 1996[1]. Οι Bibhutibhushan Datta και Avadhesh Narayan Singh ανέλυσαν το έργο του Αριαμπάτα, μαζί με πολλές άλλες συνεισφορές της αρχαίας Ινδίας στα μαθηματικά, στο καινοτόμο τους βιβλίο, *History of Hindu Mathematics*, σε δύο τόμους (1935 και 1938). Ο Αριαμπάτα παραθέτει ένα σύνθετο πρόβλημα συναλλαγών χρημάτων διατυπωμένο ως εξής (Αριαμπάτα, *Ganitapada*, 25, Shukla & Sarma, 1976, σ. 68):

> "Multiply the interest on the principal plus the interest on this principal by the time and by the principal; then add the square of the half principal; then take the square root; then subtract half the principal; then divide by the time: the result is the interest on the principal".
>
> «Πολλαπλασιάστε τον τόκο του κεφαλαίου συν τον τόκο αυτού του κεφαλαίου με το χρόνο και το κεφάλαιο. Στη συνέχεια προσθέστε το τετράγωνο του μισού κεφαλαίου. Μετά πάρτε την τετραγωνική ρίζα. Έπειτα αφαιρέστε το μισό του κεφαλαίου. Στη συνέχεια διαιρέστε με το χρόνο: το αποτέλεσμα είναι ο τόκος του κεφαλαίου».

Η παραπάνω παράθεση μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής: ένα κύριο χρηματικό ποσό P δανείζεται σε ένα άτομο με συγκεκριμένο επιτόκιο ανά μήνα. Στο τέλος του πρώτου μήνα, οι τόκος I που συγκεντρώνεται στο κεφάλαιο P δανείζεται ξανά με το ίδιο επιτόκιο για T μήνες και ο τόκος μετατρέπεται σε ποσό A.

Το πρόβλημα είναι να βρεις το I όταν τα A, P και T είναι γνωστά. Ο Αριαμπάτα έδωσε την ακόλουθη λύση:

[1]Η δεύτερη έκδοση του έγινε το 2001: Hooda & Kapur (2001).

$$I = \frac{\sqrt{PTA + \left(\frac{P}{2}\right)^2} - \left(\frac{P}{2}\right)}{T}$$

Για να το κατανοήσουμε, ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα: ας υποθέσουμε ότι έχουν δανειστεί 10.000 Rs και οι τόκοι που συγκεντρώθηκαν μετά από ένα μήνα δανείζονται με το ίδιο επιτόκιο για 8 μήνες. Το συνολικό ποσό που συγκεντρώθηκε μετά από 8 μήνες είναι 800 Rs. Ποιος είναι ο τόκος που συγκεντρώθηκε από το κεφάλαιο στο τέλος του πρώτου μήνα; Σε σύμβολα το *P* είναι 10,000 Rs, το *T* είναι 8 μήνες, και το *A* είναι 800 Rs.

Οι Clark (1930), Datta & Singh (1935), Shukla & Sarma (1976) και Hooda & Kapur (2001) μοιράζονται αυτή την παράθεση του Αριαμπάτα που έχει τη λύση. Μερικοί έχουν δώσει ακόμη και απλά παραδείγματα για να εξηγήσουν το πρόβλημα και τη λύση του. Ωστόσο, κανένας από αυτούς τους συγγραφείς δεν αναρωτήθηκε πώς προέκυψε η λύση του Αριαμπάτα. Η παρούσα ερευνητική εργασία είναι μια προσπάθεια να αποδώσει μια πιθανή προέλευση αυτής της λύσης.

Κανόνες Δεδουλευμένων Τόκων στην Αρχαία Ινδία

Η πρακτική του δανεισμού χρημάτων με τόκο υπήρχε στην Ινδία. Τα αρχαία και μεσαιωνικά ινδικά κείμενα χρησιμοποιούν τους σανσκριτικούς όρους *kusida, vardhusa, vrddhi, vidija* για να ορίσουν τους τόκους ή την τοκογλυφία (Sharma, 1965). Σύμφωνα με τους Datta & Singh (1935), η χρέωση τόκου σε δανεικά χρήματα μπορεί να τοποθετηθεί πίσω στην εποχή του Panini (700 π.Χ.) που χρησιμοποίησε το επίθημα *ka* στις αριθμητικές λέξεις σε περίπτωση «τόκου, ενοικίου, κέρδους, φόρου ή δωροδοκίας». Ο Baudhayana στο *Dharmasutra* του γύρω στον 5ο αιώνα π.Χ., επιτρέπει στη *vaisya*, μια κοινωνική κάστα στην αρχαία Ινδία, να κερδίζει τα προς το ζην δανείζοντας χρήματα με τόκους, αλλά μόνο με επιτόκιο πέντε *Masas* για είκοσι πέντε που ανέρχονται στο 20 τοις εκατό (Olivelle, 1999, σ. 99). Στον ίδιο τόνο, το *Narada-Smrti* αναφέρει τον δανεισμό με επιτόκιο ως έναν τρόπο να κερδίσεις χρήματα, μαζί με τη γεωργία, το εμπόριο, την τέχνη ή τις υπηρεσίες (στίχος 42, Lariviere, 1989, μέρος II, σ. 44).

Στην αρχαία Ινδία, για να ελέγχεται η απληστία των τοκογλύφων, απαγορεύονταν από τους νόμους οι υψηλοί τόκοι δανείων σε φτωχούς. Οι νομικοί κώδικες στην Ινδία ρύθμιζαν εμπορικές πρακτικές για την προστασία των καταναλωτών, μαζί με κοινωνικούς και θρησκευτικούς κώδικες. Για παράδειγμα, τα *Manu-Smrti, Narada-Smrti* και *Brihaspati-Smrti* παρέχουν κώδικες στους τοκογλύφους να χρεώνουν μόνο ένα ογδοηκοστό του κεφαλαίου κάθε μήνα, γενικά, που ανέρχεται σε 1,25 τοις εκατό ανά μήνα ή 15 τοις εκατό ετησίως (Goyal et al., 2013). Σε κανονικές συνθήκες, ο Baudhayana συνιστά 10 τοις εκατό ετησίως ενώ ο Gautama το αυξάνει σε 15 τοις εκατό. Αν και σε κανονικές περιπτώσεις προτείνονταν χαμηλά επιτόκια, σε περίπτωση υψηλού κινδύνου για τους πιστωτές, επιτρεπόταν υψηλότερο επιτόκιο. Οι Chatterjee (1960), Sharma (1965), Goyal et al. (2013), και Mannepalli (2014) παρέχουν καλές περιλήψεις πρακτικών επιτοκίων και νόμων που εξαρτώνται από τον κίνδυνο και από την κοινωνική κάστα. Στο *Dharmasutra* του Gautama, παρέχονται οι ακόλουθοι κανόνες για τα επιτόκια: Το νόμιμο (*dharmy*a) επιτόκιο είναι πέντε *Masas* το μήνα για είκοσι. Σύμφωνα με ορισμένους, το ποσοστό αυτό δεν ισχύει για περισσότερο από ένα χρόνο. Εάν το δάνειο παραμένει σε εκκρεμότητα για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, το κεφάλαιο διπλασιάζεται. Δεν προκύπτουν τόκοι μόνο εάν ο δανειστής κάνει χρήση της εγγύησης του δανειολήπτη ή όταν ο δανειολήπτης επιθυμεί να διακανονίσει το χρέος αλλά εμποδίζεται από το να το κάνει.

Οι συνήθεις τύποι τόκων είναι το κυκλικό επιτόκιο, το περιοδικό επιτόκιο, το συμβατικό επιτόκιο, η χειρωνακτική εργασία, το ημερήσιο επιτόκιο και η χρήση της εγγύησης. Στην περίπτωση των ζωικών προϊόντων, του μαλλιού, των αγροτικών προϊόντων και ζώων, ο τόκος δεν θα πρέπει να υπερβαίνει το πενταπλάσιο του δανείου (*Dharmasutra* του Gautama, 12, σσ. 29-36, Olivelle, 1999, σ. 99). Την εποχή του Chandragupta (321-297 π.Χ.), υπήρχαν νόμοι για την αποφυγή υπερβολικών επιτοκίων, όπως γνωρίζουμε από το *Arthsastra* του Kautilya: Το επιτόκιο ενός *pana* (ασημένιο νόμισμα) και ενός τετάρτου ανά μήνα τοις εκατό είναι εντάξει. Πέντε *panas* το μήνα τοις εκατό είναι το εμπορικό επιτόκιο (*vyavahariki*). Δέκα *panas* το μήνα τοις εκατό συνηθίζονταν στην ενδοχώρα. Είκοσι *panas* το μήνα τοις εκατό μεταξύ των θαλάσσιων εμπόρων (*samudranam*). Τα άτομα που υπερβαίνουν ή προκαλούν την υπέρβαση των παραπάνω επιτοκίων θα τιμωρούνται με την θανατική ποινή και οι κομιστές τέτοιων συναλλαγών θα πληρώνουν το ήμισυ του παραπάνω προστίμου (Kautilya's *Arthsastra*, Βιβλίο III, Κεφάλαιο 8 ή Κεφάλαιο 68 από την αρχή).

Τι γίνεται με την πρακτική του ανατοκισμού για δανεισμό χρημάτων; Σύμφωνα με τους Chatterjee (1960) και Mannepalli (2014) τέτοιες πρακτικές υπήρχαν στην αρχαία Ινδία. Ο σανσκριτικός όρος που χρησιμοποιείται για το επιτόκιο ανατοκισμού *cakravrddhi* (*cakra* σημαίνει τροχός ή κυκλικός, *vrddhi* σημαίνει αύξηση ή τόκος) υποδηλώνει τόκο επί τόκου. Τα *Narada-Smrti* (στίχοι 87-89) και *Brhaspati-Smrti* (X: 10) ορίζουν το *cakra-vrddhi* ως τόκο επί του τόκου (Chatterjee, 1960, σ. 41, Lariviere, 1989, σ. 58). Για παράδειγμα, το *Narada-Smrti* εξηγεί το είδος των τόκων στον δανεισμό χρημάτων. Σύμφωνα με το *sastras*, υπάρχουν τέσσερα είδη τόκων σε ένα δάνειο: ενιαίος (corporal), περιοδικός, καθορισμένος και κυκλικός. Ο ενιαίος είναι ένα τέταρτο *pana* την ημέρα χωρίς μείωση του κεφαλαίου. Ο περιοδικός είναι πληρωτέος κάθε μήνα. Ο καθορισμένος είναι αυτός με τον οποίο έχει συμφωνήσει ο οφειλέτης. Ο κυκλικός είναι τόκος επί τόκου (στίχοι 87-89, Lariviere, 1989, μέρος II, σ. 58). Στο *Manu-Smrti* (VIII, 153-156) αυτός ο όρος χρησιμοποιείται πολλές φορές και χαρακτηρίζεται ως ανήθικος. Το *Brhaspati-Smrti* καταδίκασε επίσης τον ανατοκισμό ως κατακριτέα τοκογλυφία (XI; 1-6, Mannepalli, 2014). Αξίζει να αναφερθεί ότι ορισμένοι μελετητές πιστεύουν ότι ο κυκλικός τόκος δεν είναι ο σύνθετος τόκος (ανατοκισμού), απλώς τόκος, αλλά καταβάλλεται μόνο στο τέλος της περιόδου του δανείου μαζί με το κεφάλαιο (Olivelle, 1999, σ. 377, Lariviere, 1989, μέρος II, σ. 59). Με άριστη βάση γνώσεων στην αρχαία Ινδία, και με δεδομένη την επιχειρηματική πρακτική δανεισμού χρημάτων, ορισμένοι μαθηματικοί τύποι για τον υπολογισμό των δεδουλευμένων χρημάτων ήταν αναπόφευκτο να δημιουργηθούν προκειμένου να κρατηθούν υπό έλεγχο ο πιστωτής και ο πελάτης. Αυτό συνέβη με το έργο του Αριαμπάτα, ο οποίος, παρά το γεγονός ότι ο ανατοκισμός θεωρήθηκε ανήθικος και προς αποφυγήν, παρείχε έναν κανόνα για μαθηματικούς υπολογισμούς.

Μερικές Πιθανές Λύσεις

Έστω P, x, A το κεφάλαιο, το επιτόκιο και το ποσό που συσσωρεύεται μέσω των τόκων μετά από $(T+1)$ μήνες αντίστοιχα.

Έστω ότι στο τέλος του μήνα T, το δεδουλευμένο ποσό σε τόκους είναι $A(T)$. Τότε, έχουμε την ακόλουθη αναδρομική σχέση,

$$A(T) = A(T-1) + x\,A(T-1)$$

Εφόσον $A(1) = x\,P$, μία επαγωγική διαδικασία αποδεικνύει τον τύπο,

$$A(T) = P\,x(1+x)^{T-1}$$

Πίνακας 1. *Δεδουλευμένο Ποσό σε Τόκους*

Μήνας	**Ποσό**
1	$x\,P$
2	$x\,P(1+x)$
3	$x\,P(1+x)^2$
4	$x\,P(1+x)^3$
-	-
$T+1$	$x\,P(1+x)^T$

Στη συνέχεια, θα διερευνήσουμε πώς ο Αριαμπάτα εξήγαγε τον τύπο για τον τόκο. Θα δοκιμάσουμε τις ακόλουθες προσεγγίσεις: Διωνυμικό Θεώρημα, Πολυώνυμο Τέιλορ και Ανισότητα Μπερνούλι.

Το Διωνυμικό Θεώρημα

Ο Sir Issac Newton (1642-1727) πιστώνεται για το γενικευμένο διωνυμικό θεώρημα. Ωστόσο, ο όρος «διωνυμικός συντελεστής» είναι αρκετά παλαιότερος και εκφράζεται μέσω του «τριγώνου του Πασκάλ» που πήρε το όνομά του από τον Μπλεζ Πασκάλ (1623-1662). Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα, γνωρίζουμε ότι:

$$\left(1+x\right)^T = 1+T\,x+\frac{T\left(T-1\right)}{2}x^2+..............+x^T$$

Όταν το x είναι μικρό, μπορούμε να κάνουμε την πρώτη προσέγγιση. Με άλλα λόγια είναι,

$$\left(1+x\right)^T \approx 1+T\,x$$

Έτσι, το ποσό που συγκεντρώθηκε σε τόκους μετά από $\left(T+1\right)$ μήνες

$$A = x\,P\left(1+x\right)^T \approx x\,P\left(1+T\,x\right)$$

Όπως φαίνεται παραπάνω, η εξίσωση που προκύπτει είναι μια τετραγωνική εξίσωση

$$A \approx P\,x + P\,T\,x^2$$

Αυτό συνεπάγεται ότι $P\,T\,x^2 + P\,x - A \approx 0$

Η επίλυση αυτής της τετραγωνικής εξίσωσης έχει ως αποτέλεσμα μόνο μία θετική ρίζα

$$x = \frac{-P+\sqrt{P^2+4APT}}{2PT}$$

Όπως σημειώθηκε νωρίτερα,

$$I = x\,P = \frac{-P+\sqrt{P^2+4APT}}{2T}$$

Περαιτέρω απλοποίηση καταλήγει στον τύπο,

$$I = \frac{\sqrt{PT\,A + \left(\frac{P}{2}\right)^2} - \left(\frac{P}{2}\right)}{T}$$

Αυτό ακριβώς πρότεινε ο Αριαμπάτα.

Πολυώνυμο Τέιλορ

Η σειρά Τέιλορ που πήρε το όνομά της από τον Μπρουκ Τέιλορ (1685-1731) χρησιμοποιείται συνήθως για την εύρεση λύσεων σε μονομεταβλητά καθώς και σε πολυμεταβλητά προβλήματα. Για παράδειγμα, χρησιμοποιείται στην Ηλεκτρολογία για την ανάλυση ροής ισχύος, στην επιστήμη των Υπολογιστών στο πλαίσιο της ανάλυσης εικόνας, στα Μαθηματικά για την εύρεση λύσεων για μη γραμμικές εξισώσεις, στη Στατιστική για τη μελέτη των πολυμεταβλητών δεδομένων και επίσης στη Μαθηματικά Οικονομικά για τη μελέτη της σταθερότητας της αγοράς.

Έστω $A = x\,P\left(1+x\right)^T = f\left(x\right)$

$$\approx f\left(0\right) + x\,f^{'}\left(0\right) + \frac{x^2}{2}\,f^{''}\left(0\right) \qquad \text{(λόγω προσέγγισης δεύτερης τάξης)}$$

$$\approx 0 + x\left(P\right) + \frac{\left(2PT\right)}{2}x^2$$

$$\approx P\,x + P\,T\,x^2$$

Αυτό καταλήγει πάλι στην ίδια τετραγωνική εξίσωση $P\,T\,x^2 + P\,x - A = 0$ και ως εκ τούτου στον ίδιο τύπο.

Ανισότητα Μπερνούλι

Εδώ, θα χρησιμοποιήσουμε μια ανισότητα γνωστή ως «ανισότητα Μπερνούλι» από τον 17ο αιώνα μ.Χ.,

$$\left(1+x\right)^T \geq 1 + x\,T \quad \text{άρα,} \quad A = x\,P\left(1+x\right)^T \geq x\,P\left(1+T\,x\right)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το κάτω όριο και στη συνέχεια λύσουμε την εξίσωση, τότε έχουμε:

$$A = x\,P + P\,T\,x^2$$

Αυτό πάλι καταλήγει στην ίδια τετραγωνική εξίσωση

$$P T x^2 + P x - A = 0$$

Επομένως, έχουμε τον ίδιο τύπο για τον τόκο.

Συμπέρασμα

Είναι γνωστό όπως αναφέρθηκε παραπάνω ότι ο δανεισμός χρημάτων με τόκους ήταν μια πρακτική στην αρχαία Ινδία. Μια μαθηματική λύση του προβλήματος θα προέκυπτε αναπόφευκτα σε μια τέτοια κατάσταση βοηθώντας τον πιστωτή και τον πελάτη να συμφωνήσουν για το ποσό αποζημίωσης κάθε μήνα.

Οι μαθηματικοί στην αρχαία Ινδία γνώριζαν τους διωνυμικούς συντελεστές και τον τετραγωνικό τύπο. Τι γίνεται με το διωνυμικό θεώρημα ή το πολυώνυμο Τέιλορ ή την ανισότητα Μπερνούλι; Γνώριζαν ο Αραμπιάτα ή οι άλλοι μαθηματικοί της εποχής εκείνης τις προσεγγίσεις που βασίζονται στη σειρά Τέιλορ; Αν και η έννοια των παραγώγων ήρθε πολύ αργότερα, οι βασικές ιδέες μπορεί να ήταν γνωστές ήδη εκείνη την εποχή. Το ίδιο μπορεί να ειπωθεί και για την ανισότητα Μπερνούλι.

Ωστόσο, οι διωνυμικοί συντελεστές ήταν γνωστοί στην αρχαία Ινδία και είναι αρκετά πιθανό οι αρχαίοι Ινδοί μαθηματικοί να γνώριζαν το διωνυμικό θεώρημα. Ο Bag (1966) έδειξε τη χρήση μέτρων στο *Chandah-Sutra*, ένα βιβλίο που γράφτηκε γύρω στο 200 π.Χ. Επιδεικνύει το διωνυμικό πρόβλημα και η μέθοδος προσδιορισμού των διωνυμικών συντελεστών προέκυψε από μετρική εξέταση. Η ανάλυση απαιτεί καλή γνώση της σανσκριτικής γλώσσας.

Σε αυτό το σενάριο, ο Αριαμπάτα που γνώριζε καλά τη σανσκριτική γλώσσα, την προσωδία της και τις μαθηματικές μετρικές της δομές, ίσως εξήγαγε αυτόν τον τύπο δεδουλευμένων τόκων χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα. Είναι ένα ενδιαφέρον θέμα που απαιτεί περαιτέρω διερεύνηση.

Ευχαριστίες

Οι συγγραφείς ευχαριστούν τον Δρ. Γιώργο Μπαλόγλου και τη Δρ. Ελίζαμπεθ Γουίλκοξ για την τεχνική βοήθεια, την κριτική ανάγνωση και τις πολύτιμες προτάσεις.

Βιβλιογραφία

Bag, A. K. (1966) Binomial Theorem in Ancient India. *Indian Journal of History of Science* 1(1): 68-74.

Chatterjee, H. (1960) *The Law of Debt in Ancient India*. Calcutta: Gupta Press.

Clark, W. E (1930) The *Aryabhatiya of Aryabhata I.* Illinois: The University of Chicago Press.

Datta, B., Singh, A. N. (1935, 1938) *History of Hindu Mathematics*. New York: Asia Publishing House,

Goyal, P., Goyal, M., Goyal, S. (2013) Consumer Protection Law in Ancient India. *Journal of Human Values* 19(2): 147-157.

Hooda, D. S., Kapur, J. N. (2001) *Aryabhata: Life and Contributions*. New Delhi: New Age International.

Kumar, A. (2019) *Ancient Hindu Science*. Mumbai: Jaico Publishing House.

Lariviere, R. W. (1989) *The Narada-Smrti* (Part II). Philadelphia: University of Pennsylvania.

Mannepalli, G. (2014) Banking and Business of Interest in Early Times of India (Special References with Inscriptions & Dharma-sutras). *IOSR Journal of Business and Management* 16(10): 63-71.

Montgomery, S. L., Kumar, A. (2000) Telling Stories: Some Reflections on Orality in Science. *Science as Culture* 9(3): 391-404.

Montgomery, S. L., Kumar, A. (2015) *A History of Science in World Cultures; Voices of Knowledge*. London: Routledge.

Morelon, R. (1996) General Survey of Arabic Astronomy (book chapter), In Roshdi Rashed (ed.), *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, volume 1. London: Routledge.

Olivelle, P. (1999) *Dharma-sutras*: The Law Codes of Apastamba, Gautama, Baudhayana, and Vasistha. New York: Oxford University Press.

Sachau, E. C. (1964) *Alberuni's India*. New Delhi: S. Chand & Company.

Sharma, R. S. (1965) Usury in Early Medieval India (400 – 1200 AD). *Comparative Studies in Society and History* 8(1): 56-77.

Shukla, K. S., Sarma, K. V. (1976) *Aryabhatiya of Aryabhata*. New Delhi: Indian National Science Academy.

Aryabhata I's Solution to Accrued Interest Income on Principal Over Time - How Was it Done?

Ampalavanar Nanthakumar
Professor
State University of New York at Oswego, USA

Alok Kumar
Professor
State University of New York at Oswego, USA

Aryabhata I in his book Aryabhatiya (Ganita-pada, 25) provides the correct solution to a situation where a principal amount of money (P) is lent out at a defined interest rate per month. At the end of the first month, the earned interest of money (I) is again given as a loan at the same interest rate for (T) months. After the end of the T months, the earned interest of money turns into an amount (A). For given values of P, T, and A, Aryabhata I provided a formula to find I without showing the details how the formula was derived. The present article provides a possible simple procedure to derive that formula.

Keywords: *Aryabhata I, Aryabhatiya, Taylor series, binomial theorem, Bernoulli's inequality*